Pos の射影的対象と選択公理

石井大海

2012 年 3 月 4 日

1　概要

Awodey [2] の演習問題を解いていたところ，選択公理と同値な命題を見付けたので証明を試みました．手許の文献でこの同値性に言及しているものはなかったと思います．

2　準備

以下では，圏 **Pos** とは，半順序集合（partially ordered set，以下 poset）を対象，その間の単調写像を射とした圏であるとします．恒等写像は明らかに単調ですし，単調写像と単調写像の合成が再び単調となることからこれは実際に圏となります．

Def. 1 (射影的)**.** 圏 $\mathbf{C}$ の対象 P が射影的 (projective) であるとは，任意の対象 $E, X \in \mathbf{C}$ と射 $f : P \to X$ およびエピ射 $e : E \twoheadrightarrow X$ が与えられたとき，次の図式を可換にする（一意とは限らない）射 $\hat{f} : P \to E$ が必ず存在することである．

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, two heads, "e"] \\
P \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

射影的対象の概念を用いて，選択公理を言い換えたものが以下です．

Th. 1. 以下の命題は選択公理と同値．

> 圏 **Sets** の任意の対象は射影的である．

Proof. @alg-d さんのサイト [1] を参照．　∎

Th. 2. 圏 **Pos** のエピ射は全射単調写像と完全に一致する．

概略. e がエピ射でないとすると，$he = h'e$ かつ $h \neq h'$ なる射が存在し，e の定義域の外に $h(x) \neq h'(x)$ なる x が存在することになり全射とならない．また，エピ射かつ全射でない単調写像 e が存在したとすると，e の定義域の外から一点を取り，その行き先を上手く違えた h, h' を取ってやることで矛盾を導くことが出来る．　∎

また，以下では次の事実を用いる．

Fact. 通常の集合 S は，離散 *poset*，即ち，各元 $x \in S$ についての反射律のみを仮定して得られる *poset* と見做すことで **Pos** の対象と見做すことが出来る．

3　**Pos** と **Sets** の関係

Th. 3. 以下の命題は選択公理と同値．

> 集合を離散 *poset* と見做すことによって，**Sets** は **Pos** の射影的対象からなる充満部分圏となる．

Proof. (i) <u>必要性.</u>
集合の間の写像は，対応する離散 poset の間の単調写像と見做すことが出来るので，結局は **Pos** の射影的対象と離散 poset が一致することを示せばよい．
まず，任意の集合 S は **Pos** で射影的であることを示そう．S を集合，即ち離散 poset，E, X を任意の poset とし，単調写像 $f : S \to X$ およびエピ射 $e : E \twoheadrightarrow X$ が与えらえているとす

る．今，poset A に対応する台集合を $|A|$，単調写像 f の台写像を $|f|$ で表わすことにすると，定理 2 より **Pos** でのエピ射は全射でもあることに注意すると，**Sets** で次の図式を可換にする射 $\hat{f} : |S| \to |E|$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & {|E|} \arrow[d, two heads, "{|e|}"] \\
{|S|} \arrow[ur, dashed, "{|\hat{f}|}"] \arrow[r, "{|f|}"'] & {|X|}
\end{tikzcd}
$$

あとは，$|\hat{f}|$ が単調写像となっていることを示せばよい．S は離散 poset より，成立する順序関係は反射律のみであるので，特に $|\hat{f}|(a) \leq |\hat{f}|(a)$ が云えればよい．しかるに，E は poset であったので反射律が成立し，特に $|\hat{f}|(a) \leq |\hat{f}|(a)$ が常に成立している．よって $|\hat{f}|$ は単調写像．よって状況を **Pos** に引き戻して

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, two heads, "e"] \\
S \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．よって任意の集合は **Pos** で射影的である．

逆に，$P \in \mathbf{Pos}$ を射影的対象とする．P の元からなる離散 poset を $\mathrm{dis}(P)$ と書くことにする．写像 $i : \mathrm{dis}(P) \twoheadrightarrow P$ を $i(a) = a$ で定めると，これはは明らかに全射単調写像であり，従って **Pos** のエピ射である．よって，以下を可換にするような $\hat{1}_P : P \to \mathrm{dis}(P)$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{dis}(P) \arrow[d, two heads, "i"] \\
P \arrow[ur, dashed, "\hat{1}_P"] \arrow[r, "1_P"'] & P
\end{tikzcd}
$$

すなわち，$i \circ \hat{1}_P = 1_P$ である．特に $|P| = |\mathrm{dis}(P)|$ であり，定義から $|i| = 1_{|P|} = 1_{|\mathrm{dis}(P)|}$ となる．すると，

$$
\begin{aligned}
|\hat{1}_P \circ i| &= |\hat{1}_P| \circ |i| = |\hat{1}_P| \circ 1_{|P|} = |\hat{1}_P| \\
&= 1_{|P|} \circ |\hat{1}_P| = |i| \circ |\hat{1}_P| = |i \circ \hat{1}_P| \\
&= |1_P| = 1_{|P|} = 1_{|\mathrm{dis}(P)|} = |1_{\mathrm{dis}(P)}|
\end{aligned}
$$

$\therefore \hat{1}_P \circ i = 1_{\mathrm{dis}(P)}$ in **Pos**

よって，$\hat{1}_P$ は **Pos** での同型射となる．今，$\mathrm{dis}(P)$ は離散 poset だったので，それと同型となる P もまた離散 poset となる．

以上より示された．

(ii) 十分性．

Pos の射影的対象と離散 poset が一致すると仮定する．今，Fact より任意の集合 A は離散 poset と同一視出来る．すると，A は **Pos** で射影的であり．他の集合 E, X も **Pos** の対象と見做せ，その間の全射 $e : E \to X$ と写像 $f : A \to X$ が存在すれば，それらは poset としての A, E, X 間の単調写像と同一視出来，とくに e は **Pos** でエピ射となる．すると，それらに対して下の図式を可換にする $\hat{f} : A \to E$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, two heads, "e"] \\
A \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
$$

再び **Sets** に戻って考えれば，これは任意の集合は射影的であると云うことであり，定理 1 より選択公理が従う．

∎

参考文献

[1] alg d. 選択公理 | 壱大整域. http://alg-d.com/math/ac/.

[2] Steve Awodey. *Category Theory*. No. 52 in Oxford Logic Guide. Oxford University Press, second edition, 2010.